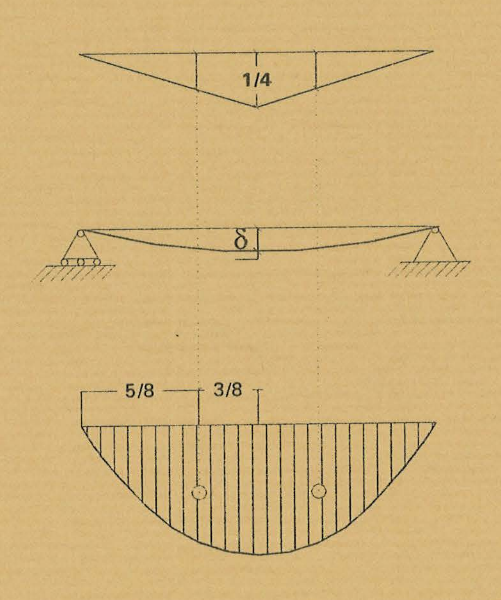
VIGAS (II)

RIGIDEZ

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

VIGAS (II)
RIGIDEZ

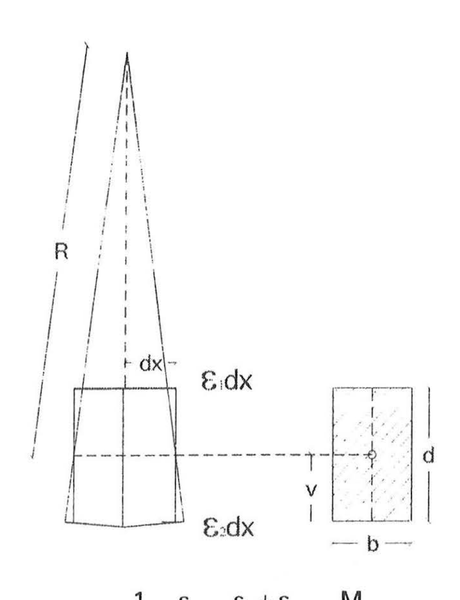
por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS

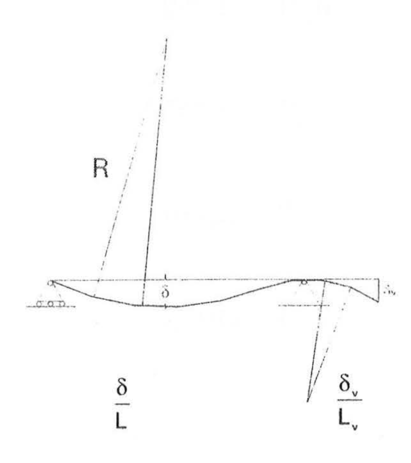
CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Vigas II. Rigidez

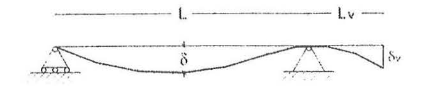
Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 31.03
ISBN: 84-95365-30-8 (obra completa. 3ª edición))
ISBN: 84-95365-33-2 (rigidez. 3ª edición)
Depósito Legal: M-37920-2000

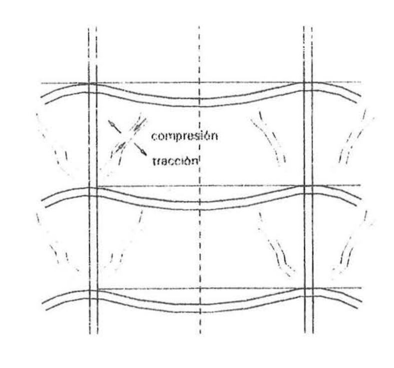


$$\frac{1}{R}=\frac{\varepsilon_2}{v}=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{d}=\frac{M}{E\cdot I}$$



$$\frac{\delta}{L} \qquad \frac{\delta_v}{L_v}$$





COMPROBACIÓN DE RIGIDEZ EN VIGAS RECTAS DE SECCIÓN CONSTANTE

Las curvaturas locales de una viga:

$$\frac{1}{R}=\frac{\varepsilon}{V}=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{d}=\frac{2\cdot\varepsilon}{d}=\frac{M}{E\cdot I}$$ —en vigas de sección simétrica respecto al eje X—

producen una deformación de la línea neutra que se suele denominar **elástica** de la viga.

Utilizaremos como medida de la **rigidez** de la viga, el cociente entre la **flecha** δ en el centro —el extremo en los voladizos— y la luz total de la viga: δ/L

En vigas de sección conexa —alma llena— el efecto de las distorsiones locales es despreciable.

ESTÁNDARES DE RIGIDEZ

La razón de usar este cociente, llamado **flecha relativa**, es que es una medida de la **distorsión** que experimentan los elementos de compartimentación colocados sobre la estructura, que suelen ser muy rígidos y poco resistentes, por lo que se rompen con facilidad si la estructura no es suficientemente rígida.

Es claro que la rigidez relativa de un voladizo, δ_v / L_v, implica el doble de distorsión de los elementos de compartimentación que la rigidez relativa de una viga δ / L, por lo que el estándar recomendado para los voladizos es en general la mitad que el de las vigas.

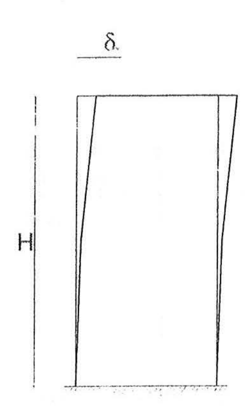
—Conviene recordar que el movimiento real del extremo del voladizo suele depender más del giro en el apoyo, función a su vez del tramo contiguo, que de la flecha propia—.

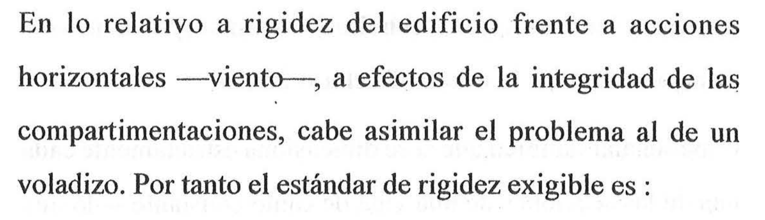
No existen medidas precisas de la distorsión que admiten los distintos tipos de compartimentación; además influye el momento de la obra en que aparezcan la cargas, la naturaleza de las acciones variables y, desde luego, los detalles del contacto de los cerramientos con la estructura, por lo que es imposible enfocar el problema con absoluto rigor y se suele tomar como **estándar de rigidez de una viga** la flecha relativa teórica para el total de las acciones de servicio previstas. Los estándares habitualmente empleados son los siguientes:

En general	$\delta/L \leq 1/500$	$\delta_v/L_v \leq 1/250$
Tabiquería convencional de ladrillos de dimensión normal tomados con yeso	$\delta/L \leq 1/400$	$\delta_v/L_v \leq 1/200$
Superficie sin divisiones	$\delta/L \leq 1/300$	$\delta_v/L_v \leq 1/150$
Cubiertas ligeras sin divisiones interiores que lleguen a ellas	$\delta/L \leq 1/250$	$\delta_v/L_v \leq 1/125$

En lo que sigue se toma como estándar al $\delta/L \leq 1/500$, teniendo en cuenta que en los demás casos, menos exigentes, bastará una regla de tres para obtener las oportunas conclusiones.

Cabe señalar, no obstante, que mientras que el no cumplimiento del estándar de resistencia puede llevar a la ruina de la estructura, la falta de rigidez tiene consecuencias menos graves pero bastante desagradables. Por otra parte, cuando las vigas —o forjados— son poco rígidos se aprecian vibraciones molestas originadas por el simple paso de las personas.





En lo relativo a rigidez del edificio frente a acciones horizontales —viento—, a efectos de la integridad de las compartimentaciones, cabe asimilar el problema al de un voladizo. Por tanto el estándar de rigidez exigible es :

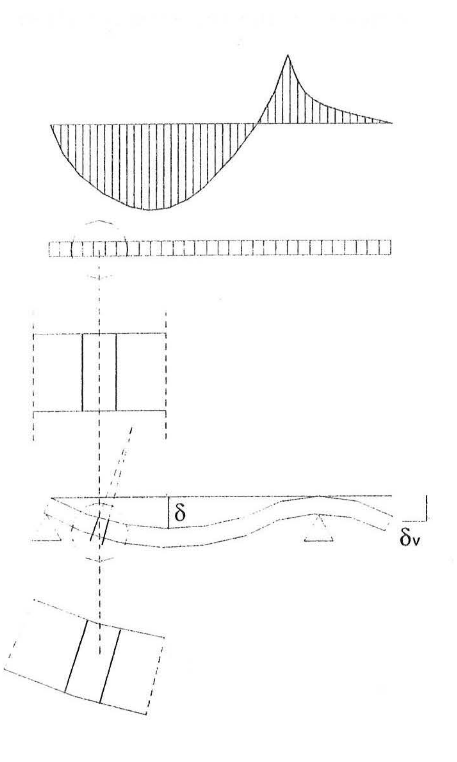
$$\delta_{\varpi}/H \leq 1/250.$$

No obstante en edificios altos este estándar da lugar a movimientos horizontales perceptibles para vientos fuertes, por lo que se aconseja una rigidez tal que:

$$\delta_w / H \leq 1/500.$$



DETERMINACIÓN DE LA RIGIDEZ RELATIVA DE UNA VIGA. CONSIDERACIONES GENERALES



Una vez que conocemos la gráfica de momentos de una viga, la determinación de las curvaturas locales es trivial:

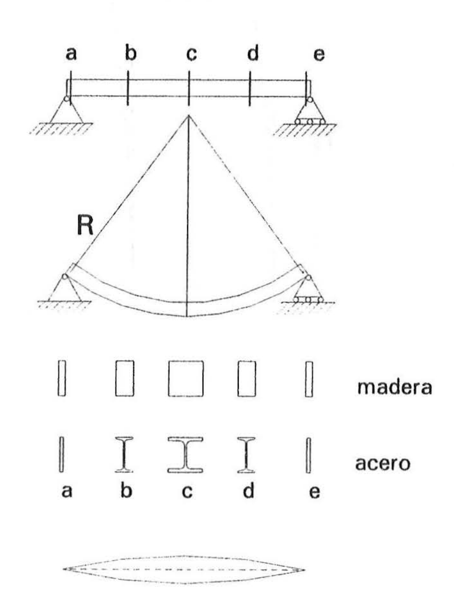
$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I} \qquad \frac{1}{R} = \frac{2 \cdot \varepsilon}{d}$$

Bastará dividir la viga en rebanadas, dibujar cada rebanada con su curvatura real, y dibujar la imagen compuesta de la viga para medir la flecha y comprobar la rigidez.

Conviene señalar respecto a este procedimiento conceptualmente simple, pero escasamente práctico, que los únicos factores que intervienen son los puramente geométricos ε, d, L, por lo que **independientemente del material, de la forma de la sección, y aun del tamaño de la viga, en los casos en los que deformaciones unitarias ε sean iguales —y ello sucede normalmente con los materiales empleados habitualmente en estructuras de edificación: madera, acero y hormigón armado—, dos vigas con la misma sustentación y la misma proporción λ = L / d que denomi-**

naremos habitualmente esbeltez, darán lugar al mismo dibujo y tendrán la misma flecha relativa.

Cabe señalar también que si se dimensiona estrictamente cada una de las secciones de una viga de canto constante —lo que es poco práctico pero posible—, tendremos en todas ellas el mismo $\varepsilon_{máx}$ y en consecuencia la misma curvatura, por lo que la deformada de la viga sería un arco de circunferencia.



Viga de curvatura constante en planta

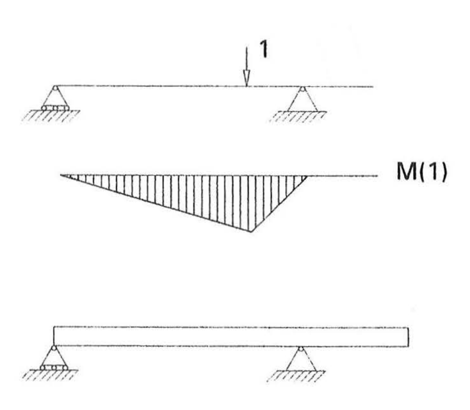
Este dimensionado, impracticable en madera y acero ya que requiere una mano de obra considerable para un ahorro teórico de material de 1/3 respecto a una viga de sección constante, se intenta con una aproximación bastante grosera en el **hormigón armado**, en el que aunque la sección exterior es constante, las armaduras se disponen en función de la resistencia necesaria en cada sección.

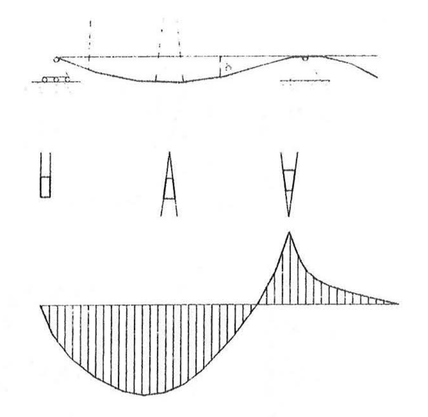
En todo caso, **las deformaciones obtenidas suponiendo que las vigas deformadas son arcos de circunferencia de curvatura** $\frac{1}{R} = \frac{2 \cdot \varepsilon_{máx}}{d} = \frac{M_{máx}}{E \cdot I}$ **son el límite superior de las deformaciones posibles con un dimensionado real.**

APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Para calcular el movimiento —desplazamiento o giro— de un punto de una estructura cuyas curvaturas locales se conocen, puede acudirse al **principio de los trabajos virtuales** mediante el siguiente artificio:

- Se dispone una **acción virtual unidad** —carga o momento— en el punto cuyo movimiento se pretende averiguar. Tendremos así la estructura en equilibrio con una gráfica de momentos virtual que en lo que sigue llamaremos M(1).

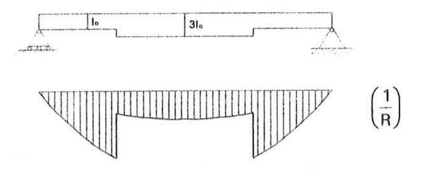




- Si se conoce la ley real de momentos y la viga tiene sección constante, es inmediato calcular las curvaturas locales reales cuya gráfica será semejante a la de momentos —si la viga no tiene sección constante no es difícil hacer las correcciones adecuadas —:

Para sección constante $\frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I}$

- En el sistema virtual en equilibrio —carga 1 y momentos M(1)— introducimos como **movimiento arbitrario la deformación real de la viga, de la que se conocen las curvaturas locales pero no el movimiento δ del punto elegido para medir la rigidez:**



El trabajo de las fuerzas exteriores **1·δ** será igual al de las fuerzas interiores $\int_0^L \mathbf{M(1)} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{dx}$

Es decir:

$$\boxed{\delta = \int_0^L M(1) \cdot \frac{1}{R} \cdot dx}$$

Ya que el valor del diferencial de trabajo de las fuerzas interiores dT en una rebanada de longitud dx es:

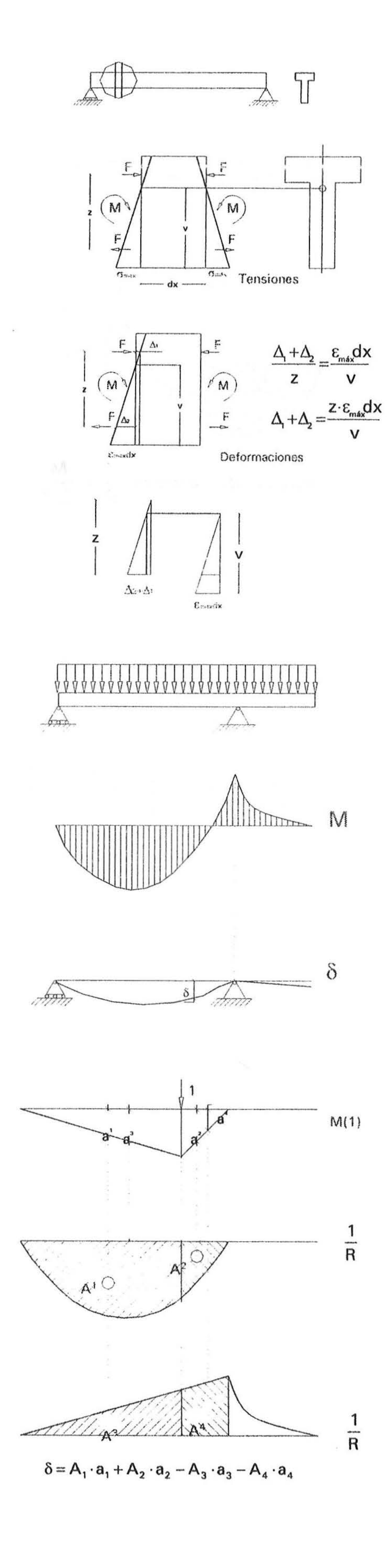
$$dT = F \cdot (\Delta_1 + \Delta_2) = F \cdot z \cdot \frac{\varepsilon_{máx}}{V} \cdot dx = M \cdot \frac{1}{R} \cdot dx$$

Tanto M(1) como 1/R son dos funciones conocidas, luego basta multiplicarlas e integrar para calcular δ.

Para calcular la integral $\int M(1) \cdot \frac{1}{R} \cdot dx$ conviene recordar que M(1) es siempre una función lineal, y para integrar el producto $M(1) \cdot \left(\frac{1}{R}\right)$ basta dividir la gráfica $\left(\frac{1}{R}\right)$ en trozos de áreas A_i con centro de gravedad conocido, hallar las ordenadas a_i correspondientes a sus centros de gravedad en la gráfica M(1) y sustituir:

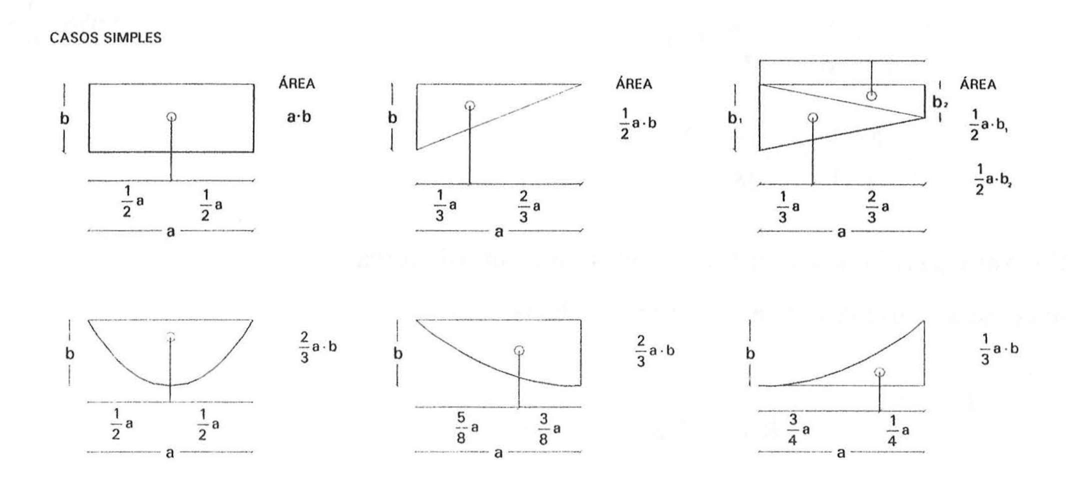
$$\int_0^L M(1) \cdot \frac{1}{R} \cdot dx = \sum A_i \cdot a_i$$

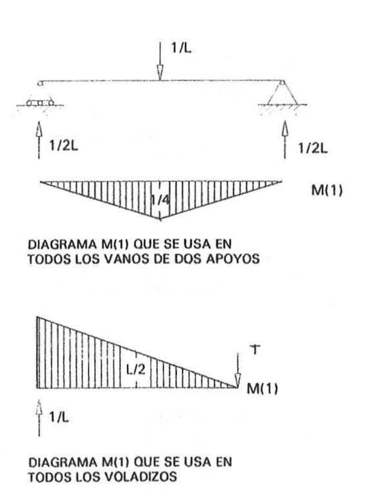
Puede simplificarse aún más la tarea utilizando gráficas $\left(\frac{1}{R}\right)$ de la mayor sencillez geométrica posible a base de manejar la superposición de varios estados de carga.



CASOS SIMPLES.

Para los casos más habituales aún puede llegarse a una mayor simplificación sin más que recordar la posición de los centros de gravedad de las figuras que aparecen habitualmente en las gráficas de momentos:

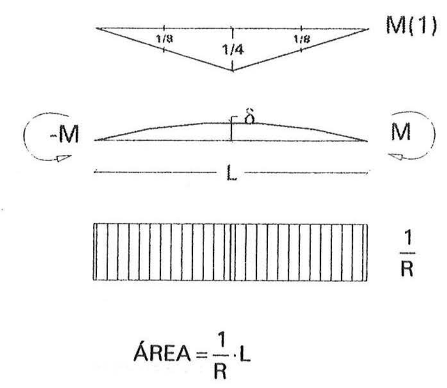




En una viga de dos apoyos interesa conocer la flecha relativa en el centro de la viga siempre —si no la máxima sí muy próxima a ella—. Podemos colocar en lugar de una carga 1, una carga 1/L y así la gráfica M(1) será adimensional y siempre la misma. Además se obtendrá directamente la flecha relativa δ/L.

-M ———— M **FLEXIÓN PURA**

$$\frac{\delta}{L}=\frac{1}{R}\cdot L\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{R}\cdot L$$



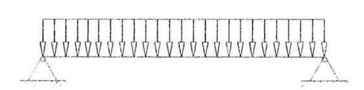
y usando alternativamente las formulaciones:

$$\frac{1}{R}=\frac{2\cdot\varepsilon}{d} \qquad \frac{1}{R}=\frac{M}{E\cdot I}$$

$$\frac{\delta}{L}=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot\varepsilon\cdot\frac{L}{d}= & \mathbf{\frac{-6}{24}}\cdot\lambda\cdot\varepsilon \\ \frac{1}{8}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}= & \mathbf{\frac{-6}{48}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}}\end{cases}$$

En lo que sigue las gráficas de momentos y por tanto de curvaturas, serán variables. Para simplificar se llama:

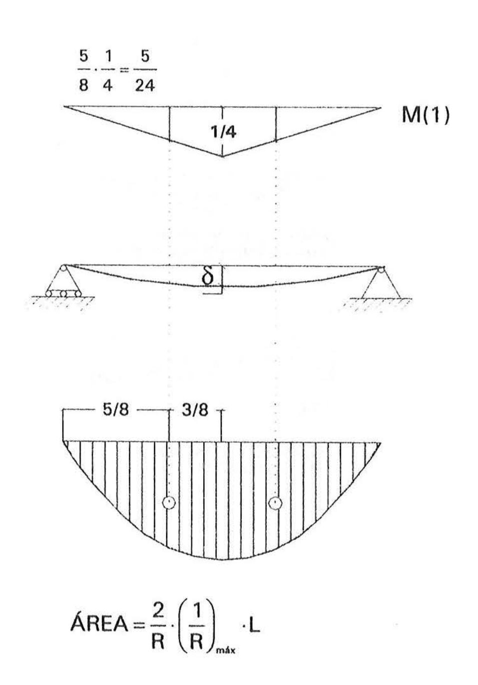
$$M_{máx}=M \qquad \left(\frac{1}{R}\right)_{máx}=\left(\frac{1}{R}\right) \qquad \varepsilon_{máx}=\varepsilon$$



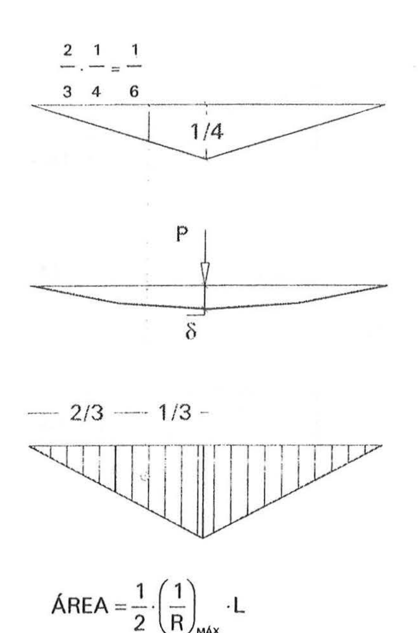
CARGA UNIFORME

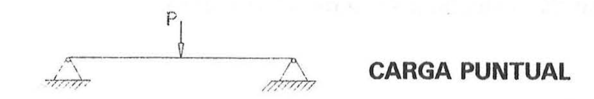
$$\frac{\delta}{L}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L\cdot\frac{5}{24}=\frac{5}{48}\cdot\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L$$

$$\frac{\delta}{L}=\begin{cases}\frac{5}{24}\cdot\varepsilon\cdot\frac{L}{d}= & \mathbf{\frac{5}{24}}\cdot\lambda\cdot\varepsilon \\ \left.\begin{matrix}\frac{5}{48}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I} \\ M=\frac{P\cdot L^2}{8}\end{matrix}\right\}= & \mathbf{\frac{5}{48}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}} \\ & \mathbf{\frac{5}{384}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}}\end{cases}$$



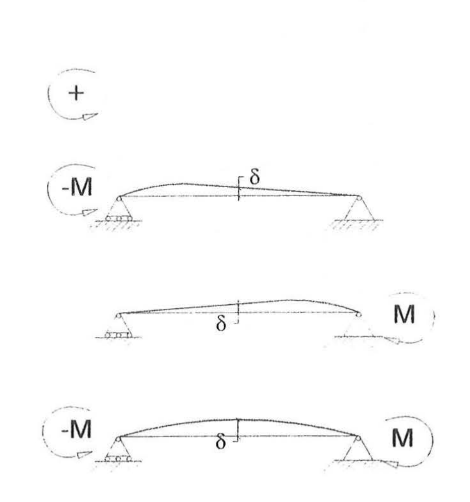
$$\frac{\delta}{L}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L$$

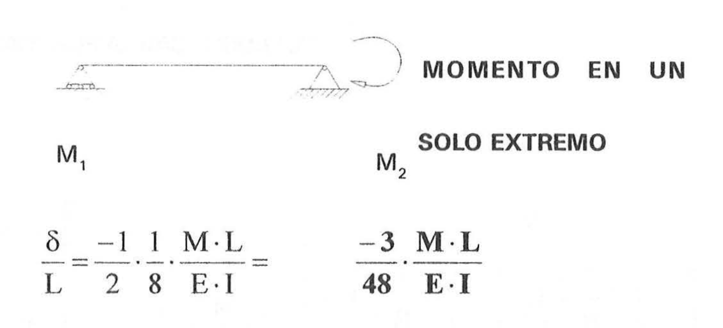




CARGA PUNTUAL

$$\frac{\delta}{L}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{6}\cdot\varepsilon\cdot\dfrac{L}{d}=\dfrac{4}{24}\cdot\lambda\cdot\varepsilon\\[2ex] \left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{M\cdot L}{E\cdot I}=\dfrac{4}{48}\cdot\dfrac{M\cdot L}{E\cdot I}\\[2ex] M=\dfrac{P\cdot L}{4}\end{array}\right\}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{48}}\cdot\dfrac{\mathbf{P\cdot L^2}}{\mathbf{E\cdot I}}\end{array}\right\}\quad\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{48}}\cdot\frac{\mathbf{M\cdot L}}{\mathbf{E\cdot I}}$$

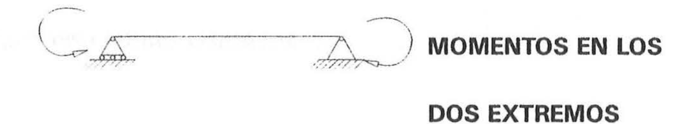




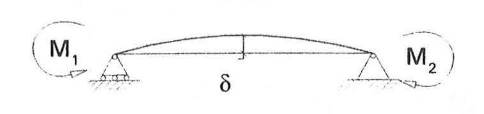
MOMENTO EN UN SOLO EXTREMO

$$\frac{\delta}{L}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}=\qquad\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{48}}\cdot\frac{\mathbf{M\cdot L}}{\mathbf{E\cdot I}}$$

La flecha de cada uno de los momentos en el centro es la mitad de la que producen los dos a la vez.



MOMENTOS EN LOS DOS EXTREMOS

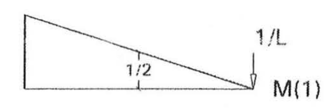


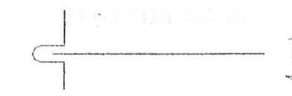
En el caso de existir dos momentos distintos —habitualmente M_1 será negativo y M_2 positivo y así se han dibujado—:

$$\delta=\frac{M_1-M_2}{16\cdot E\cdot I}\qquad\qquad \delta=-\frac{\mathbf{|M_1|+|M_2|}}{\mathbf{16\cdot E\cdot I}}$$

Conviene advertir que se trata de la flecha en el centro y no de la flecha máxima, que si $|M_1|\neq|M_2|$ será algo superior.

En el caso de la flecha propia de un voladizo:

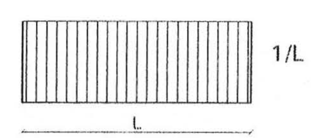




VOLADIZO. FLEXIÓN PURA

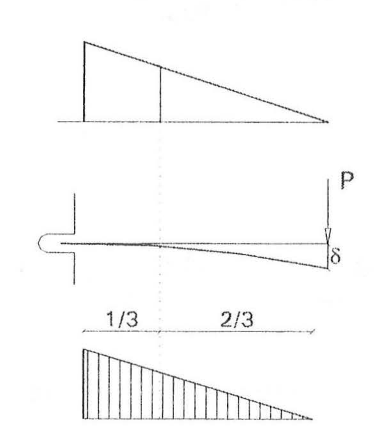


$$\frac{\delta}{L}=\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L=\begin{cases}\lambda\cdot\varepsilon\\ \mathbf{\frac{1}{2}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}}\end{cases}$$

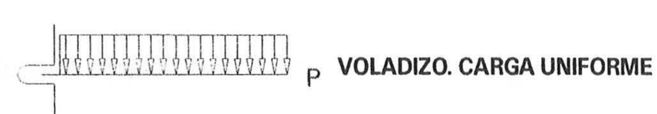




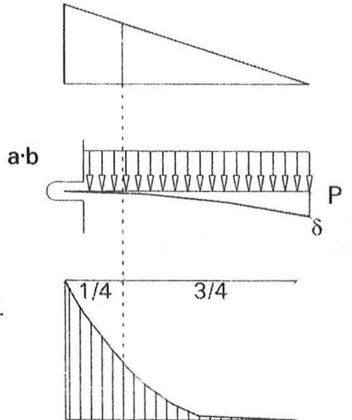
VOLADIZO. CARGA PUNTUAL



$$\frac{\delta}{L}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L=\begin{cases}\mathbf{\frac{2}{3}}\cdot\lambda\cdot\varepsilon\\ \left.\begin{matrix}\frac{1}{3}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}\\ M=P\cdot L\end{matrix}\right\}=\mathbf{\frac{1}{3}\cdot\frac{P}{E}}\end{cases}\quad\left\{\mathbf{\frac{1}{3}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}}\right.$$



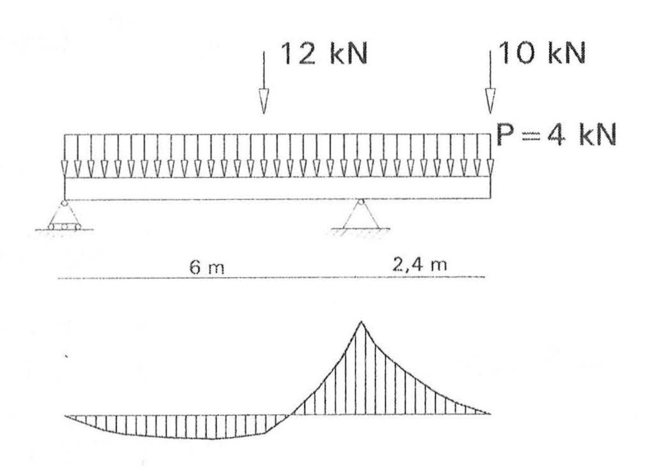
VOLADIZO. CARGA UNIFORME



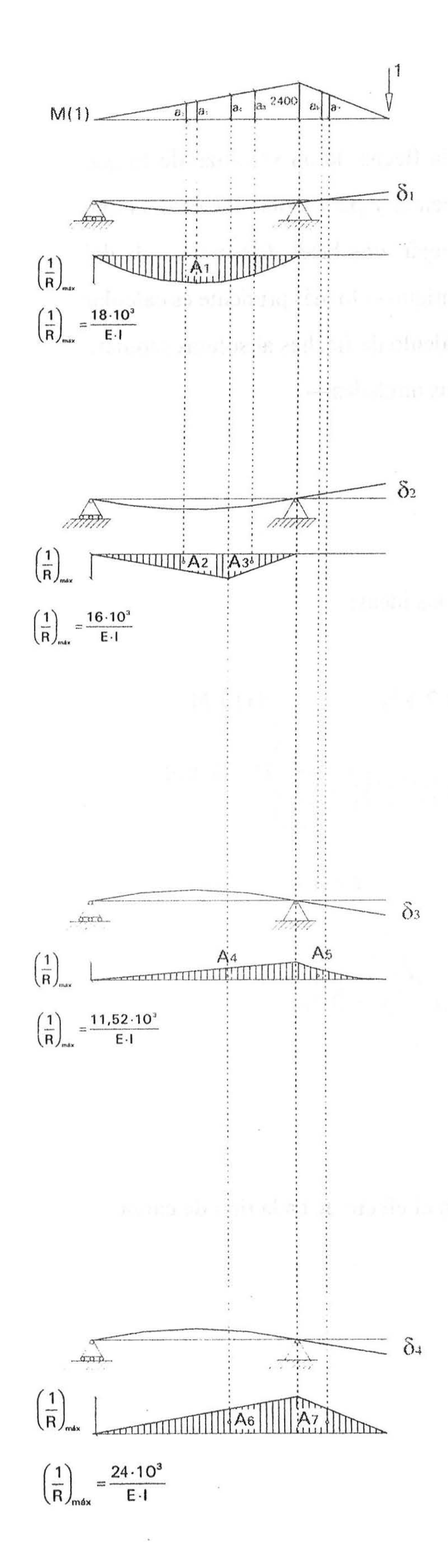
$$\frac{\delta}{L}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{R}\right)\cdot L=\begin{cases}\mathbf{\frac{1}{2}}\cdot\lambda\cdot\varepsilon\\ \left.\begin{matrix}\frac{1}{4}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}\\ M=\frac{P\cdot L^2}{2}\end{matrix}\right\}=\mathbf{\frac{1}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}}\end{cases}\quad\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}\right.$$

Dada la dependencia de la flecha de un voladizo de lo que suceda en el tramo adyacente, y para evitar los errores que puedan producirse al manejar dos luces diferentes —la del voladizo y la del tramo contiguo— lo más prudente es calcular la **flecha absoluta** —el cálculo de flechas absolutas requiere un cuidadoso manejo de las unidades—

Un ejemplo puede aclarar las ideas:



Analizaremos por separado el efecto de cada tipo de carga.



$$a_1 = 1{,}2 \cdot 10^3 \text{mm}$$

$$\delta_1 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot 18 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 = -86{,}4 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot 2400 = 1{,}067 \cdot 10^3 \text{mm}$$

$$a_3 = \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6}\right) \cdot 2400 = 1{,}867 \cdot 10^3 \text{mm}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 10^3}{E \cdot I} \cdot 4 \cdot 10^3 = \frac{32 \cdot 10^6}{E \cdot I}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 10^3}{E \cdot I} \cdot 2 \cdot 10^3 = \frac{16 \cdot 10^6}{E \cdot I}$$

$$\delta_2 = -\frac{10^9}{E \cdot I} \cdot (1{,}067 \cdot 32 + 1{,}867 \cdot 16) = -64 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

$$a_4 = \frac{2}{3} \cdot 2400 = 1{,}6 \cdot 10^3 \text{mm}$$

$$a_5 = \frac{3}{4} \cdot 2400 = 1{,}8 \cdot 10^3 \text{mm}$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{11{,}52 \cdot 10^3}{E \cdot I} \cdot 6 \cdot 10^3 = \frac{34{,}56 \cdot 10^6}{E \cdot I}$$

$$A_5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{11{,}52 \cdot 10^3}{E \cdot I} \cdot 2{,}4 \cdot 10^3 = \frac{9{,}216 \cdot 10^6}{E \cdot I}$$

$$\delta_3 = \frac{10^9}{E \cdot I} \cdot (1{,}6 \cdot 34{,}56 + 1{,}8 \cdot 9{,}216) = 71{,}88 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

$$a_6 = \frac{2}{3} \cdot 2400 = 1{,}6 \cdot 10^3 \text{mm}$$

$$a_7 = \frac{2}{3} \cdot 2400 = 1{,}6 \cdot 10^3 \text{mm}$$

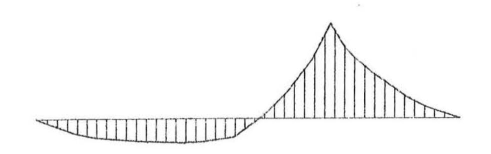
$$A_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{24 \cdot 10^3}{E \cdot I} \cdot 6 \cdot 10^3 = \frac{72 \cdot 10^6}{E \cdot I}$$

$$A_7 = \frac{1}{2} \cdot \frac{24 \cdot 10^3}{E \cdot I} \cdot 2{,}4 \cdot 10^3 = \frac{28{,}8 \cdot 10^6}{E \cdot I}$$

$$\delta_4 = \frac{10^9}{E \cdot I} \cdot (72 \cdot 1{,}6 + 28{,}8 \cdot 1{,}6) = 161{,}28 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

la flecha total será:

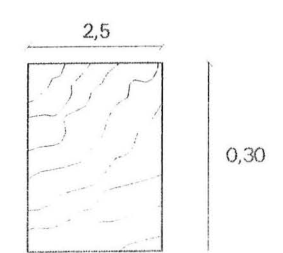
$$\delta = \frac{10^9}{E \cdot I} \cdot (-86{,}4 - 64 + 71{,}88 + 161{,}28) = 82{,}68 \cdot \frac{10^9}{E \cdot I}$$



Para hallar el valor absoluto de la flecha hay que dimensionar la viga. El momento máximo se produce en el apoyo derecho.:

$$M_{máx} = 11{,}52 + 24 = 35{,}52 \text{ kN·m}$$

Supongamos una viga de madera. Para una tensión $f = 10 \text{ N·mm}^{-2}$



$$W_x = \frac{35{,}52 \cdot 10^3}{10} = 3552 \text{ mm}^2 \cdot \text{m}$$

$$W_x = \frac{7500 \cdot 0{,}3}{6} = 3750 \text{ mm}^2 \cdot \text{m} \Rightarrow \text{ vale}$$

$$I_x = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}30^3}{12} \cdot 10^{12} = 0{,}5625 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$E = 12{,}5 \text{ kN·mm}^{-2}$$

$$E \cdot I = 7{,}03 \cdot 10^9 \text{ kN·mm}^2$$

$$\delta = \frac{82{,}68 \cdot 10^9}{7{,}03 \cdot 10^9} = 11{,}76 \text{ mm} \Rightarrow$$

habría que aumentar la inercia, para lo que bastaría un

$$b_1 = b \cdot \frac{250}{204} = 0{,}30 \text{ o un } d_1 = d \cdot \sqrt[3]{\frac{250}{204}} = 0{,}32$$

ESBELTECES LÍMITE

Para los materiales habitualmente empleados en estructuras

$\varepsilon = 0{,}8 \cdot 10^3$ para una limitación de flecha $\frac{\delta}{L} \leq \frac{1}{500}$, en el caso de la viga apoyada con carga uniforme:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{24} \cdot \lambda \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3} \leq \frac{1}{500} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{lím}} \leq \frac{24}{2} = 12$$

El valor obtenido es la **esbeltez límite para esa sustentación y caso de carga**. Cuando para un caso particular de sección, dimensionada a resistencia, $\lambda \leq \lambda_{\text{lím}}$, la flecha relativa será menor que la especificada y **no será preciso comprobar la rigidez**.

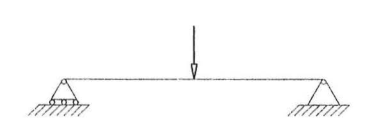
Para diferentes casos de carga:

Con $\varepsilon = 0{,}8 \cdot 10^3$ y $\frac{\delta}{L} \leq \frac{1}{500}$



$$\frac{\delta}{L} = \frac{-6}{24} \cdot \lambda \cdot \varepsilon = \left(\frac{-6}{48}\right) \cdot \frac{M}{E \cdot I} \leq \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{lím}} = 12 \cdot \frac{5}{6} = \mathbf{10} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{24} \cdot \lambda \cdot \varepsilon = \left(\frac{5}{48}\right) \cdot \frac{M}{E \cdot I} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{lím}} = \mathbf{12} \quad \Rightarrow$$



$$\frac{\delta}{L} = \frac{4}{24} \cdot \lambda \cdot \varepsilon = \left(\frac{4}{48}\right) \cdot \frac{M}{E \cdot I} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{lím}} = 12 \cdot \frac{5}{4} = \mathbf{15} \quad \Rightarrow$$

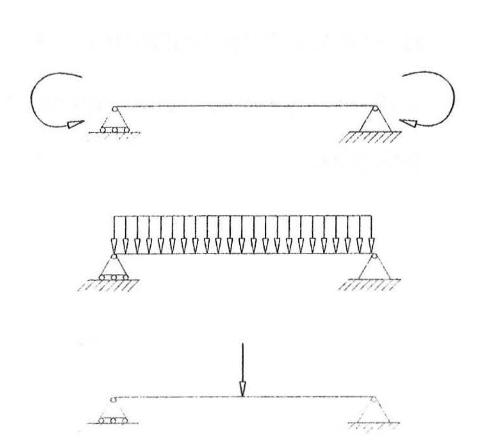
Cuando $\lambda > \lambda_{\text{lím}}$ el criterio para dimensionar la sección será el de rigidez y deberá dimensionarse la sección en función de la inercia:

$$I \geq k \cdot \frac{M}{E \cdot \left(\frac{\delta}{L}\right)}$$

siendo k dependiente del tipo de carga y de sustentación, aunque existen procesos de cálculo más cómodos que se examinan más adelante.

Antes conviene recordar que la tabla de esbelteces límite se obtiene por simple regla de tres:

Para $\varepsilon = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ y vigas apoyadas:



$\delta / L \leq$	1/500	1/400	1/300	1/200	
	10	12,5	16,64	20	$\lambda_{límite}$
	12	15	20	24	
	15	18,75	25	30	

Sabiendo una de las esbelteces límite, por ejemplo la 12, correspondiente a la carga uniforme y δ / L = 1/500, basta recordarlos factores 4, 5 y 6 correspondientes a los tres tipos de carga —ver página anterior— para establecer las otras. Y a su vez para otra condición de rigidez basta recordar que la esbeltez límite es proporcional a δ/L Para hallar la nueva esbeltez.

Para un caso particular de sustentación, luz, carga y material dados, puede usarse la proporcionalidad de las fórmulas:

$$\frac{\delta}{L} = \underbrace{\left(\frac{5}{24}\right)}_{\text{constante}} \cdot \lambda \cdot \varepsilon$$

$$\frac{\delta}{L} = \underbrace{\left(\frac{5}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E}\right)}_{\text{constante}} \cdot \frac{1}{I}$$

$$\frac{\delta}{L} = \underbrace{\left(\frac{5}{24} \cdot \frac{1}{E}\right)}_{\text{constante}} \cdot \lambda \cdot \sigma$$

Para hacer correcciones rápidamente, basta recordar que **la flecha relativa es directamente proporcional a la esbeltez y a la tensión e inversamente proporcional a la inercia.**

La primera consecuencia de esta observación es:

· Si se está diseñando una viga de sección inconexa debe elegirse una $L/d < \lambda_{lím}$ pero si la sección es conexa no existe esta libertad, y una vez elegida una sección que cumple la condición de resistencia podemos, frecuentemente, $\lambda > \lambda_{lím}$, con lo que será necesario hacer una corrección.

Por ejemplo, para una condición de rigidez de una viga de $\frac{\delta}{L} = \frac{1}{500}$ apoyada en ambos extremos con carga uniforme, si se ha obtenido una solución —que llamaremos (1)— con un canto d_1 y una inercia I_1 con una $\sigma_1 < f$, y resulta que $\lambda_1 = \frac{1}{d_1} < \lambda_{lím}$, se puede escribir en paralelo:

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)_1 = \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{E} \cdot \lambda_1 \cdot \sigma_1 \geq \frac{1}{500} \quad \text{en la solución (1)}$$

$$\frac{1}{500} = \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{E} \cdot \lambda_{lím} \cdot f \quad \text{en la viga teórica de esbeltez límite}$$

Dividiendo ambas expresiones y despejando:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{lím}} \cdot \frac{\sigma_1}{f}\right)$$

Si $\lambda \leq \lambda_{lím}$ el paréntesis es mayor que 1 e indica cuánto mayor es la flecha relativa que la admisible. En consecuencia sólo queda buscar una sección, correspondiente a la solución (2), cuya inercia sea:

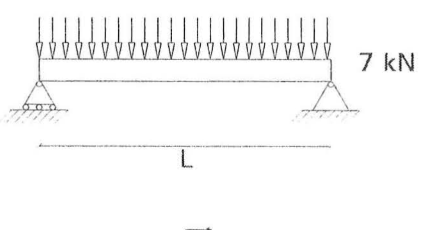
$$I_2 = I_1 \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{lím}} \cdot \frac{\sigma_1}{f}\right)$$

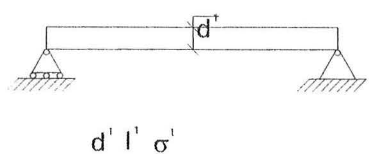
Para una luz y un material dados la flecha relativa crece proporcionalmente con:

CARGA	P,p
ESBELTEZ	λ
TENSIÓN	σ
DEFORMACIÓN UNITARIA	ϵ

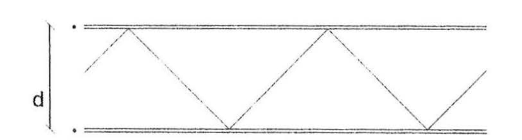
y disminuye proporcionalmente a:

INERCIA	I





d' I' σ'



7 kN/m

6 m

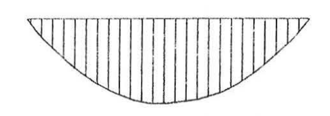
Ejemplo:

ACERO

$$f = 170\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$$

$$M = \frac{7 \cdot 6^2}{8} = 31{,}5\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$W_x = \frac{31{,}5 \cdot 10^3}{170} = 185\ \text{mm}^2 \cdot \text{m}$$



El perfil elegido —solución (1)— es **IPE 200**

$W_x = 194\ \text{mm}^2\cdot\text{m}$

$I_x = 1940\ \text{cm}^4$

$$\sigma_x = \frac{31{,}5 \cdot 10^3}{194} = 162{,}4\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-2} \Rightarrow \lambda = \frac{6000}{200} = 30 >> 12$$

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)_1 = \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{30}{12} \cdot \frac{162{,}4}{170}\right) = \frac{1}{500} \cdot (2{,}39)$$

es decir, la flecha es $\delta_1 = \frac{6000}{500} \cdot 2{,}39 = 28{,}7\ \text{mm} \Rightarrow 2{,}39$ veces mayor que la admisible.

Se necesita un perfil cuya inercia sea:

$$I_x \geq 1940 \cdot 2{,}39 = 4637\ \text{cm}^4$$

El perfil será **IPE 270**, que tiene una inercia de 529 cm^4 y un módulo resistente $W_x = 429\ \text{mm}^2\cdot\text{m}$

El nuevo perfil tiene una esbeltez $\lambda = \frac{6000}{200} = 22{,}2 >> 12$, lo que se compensa con una tensión menor que $f = 170\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$,

$$\sigma = \frac{31{,}5 \cdot 10^3}{429} = 73{,}4\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$$

La nueva flecha relativa será:

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)_2 = \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{22{,}2}{12} \cdot \frac{73{,}4}{170}\right) = \frac{1}{500}(0{,}8) < \frac{1}{500}$$

y la absoluta:

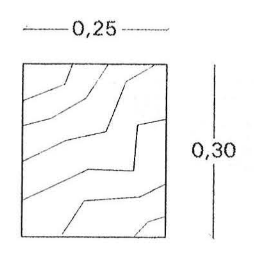
$$\delta = \frac{6000}{500} \cdot 0{,}8 = 9{,}6\ \text{mm}$$

MADERA:

$f = 10\ N{\cdot}mm^{-2}$

$M = 31{,}5\ kN{\cdot}m$

$$W_x \geq \frac{31{,}5 \cdot 10^3}{10} = 3150\ mm^2 \cdot m$$



para una sección de $300 \times 250\ mm^2$

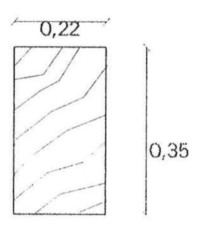
$$W_x = \frac{75000 \cdot 0{,}3}{6} = 3750\ mm^2 \cdot m$$

$$\sigma = \frac{31500}{3750} = 8{,}4\ N \cdot mm^{-2}$$

$$\lambda = \frac{6000}{300} = 20 >> 12$$

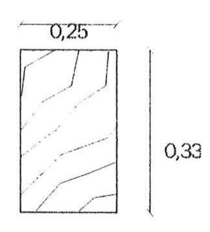
La flecha relativa será:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{20}{12} \cdot \frac{8{,}4}{10} \right) = (1{,}4) \cdot \frac{1}{500}$$



luego es necesario corregir la sección y buscar una que tenga una inercia mayor: $I_2 = 1{,}4 \cdot I_1$

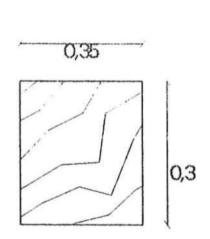
$$\left. \begin{array}{l} I_2 = \dfrac{b_2 \cdot d_2^3}{12} \\ I_1 = \dfrac{b_1 \cdot d_1^3}{12} \end{array} \right\} I_2 = I_1 \cdot \left(\frac{b_2}{b_1} \right) \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^3 = 1{,}4$$



Basta cambiar la sección de manera que

$\left(\frac{b_2}{b_1} \right) \cdot \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^3 = 1{,}4 \Rightarrow$ lo que puede lograrse modificando una de las dimensiones o ambas. Por ejemplo:

$b_2 = b_1 \cdot 1{,}4 = 0{,}25 \cdot 1{,}4 = 0{,}35$



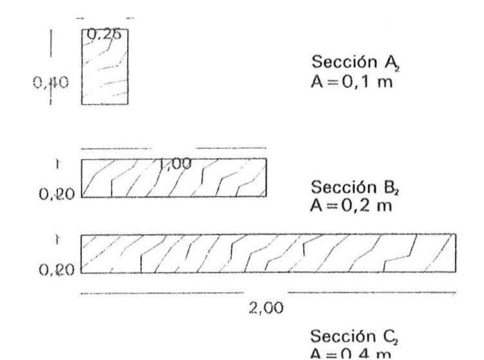
$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 1{,}12 \cdot d1 = 0{,}336$$

o bien $d_2 = 0{,}35 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 = 1{,}59 \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{1{,}4}{1{,}59} \cdot b_1 = 0{,}2$

No es, pues, imprescindible que la esbeltez de una viga sea menor que la límite, pero cuando es mayor, la rigidez necesaria se consigue al precio de reducir la sección máxima, con el consiguiente aumento de cantidad de material:

Ejemplo 2

Una viga con una luz de 4,80 m en la que la condición de resistencia nos conduce a una sección de 0,40 m x 0,25 m



$A = 0{,}1\ m^2$ —sección A—

$$\lambda = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{L} = \frac{1}{500}$$

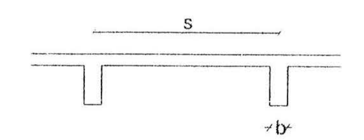
Si por alguna razón tenemos que reducir su canto a la mitad, para mantener el mismo módulo resistente $\frac{b \cdot d^2}{6}$, hay que multiplicar el ancho por 4 —sección B—, lo que implica duplicar el área de la sección y por tanto el consumo de material.

Pero la esbeltez necesaria es:

$$\lambda = \frac{4{,}80}{0{,}2} = 24 = 2 \cdot \lambda_{\text{lím}}$$

lo que obliga a rebajar la tensión σ a la mitad, y para ello es preciso duplicar otra vez el ancho —sección C— con un área 4 veces mayor que la original —sección A—.

En este proceso se acaba a veces encontrando un límite geométrico: si se trata de una serie de vigas paralelas, acaban *tropezando* unas con otras cuando b > s:



—Se llega al mismo punto razonando que para mantener constante la inercia $\frac{b \cdot d^3}{12}$ si d se reduce a la mitad b debe multiplicarse por $2^3 = 8$—.

En la práctica, salvo para vigas trianguladas, las esbelteces de las vigas apoyadas son mayores que las límite, por lo que no puede aprovecharse plenamente la resistencia del material.

Como se verá más adelante, basta coaccionar los extremos de las vigas para aumentar su rigidez.

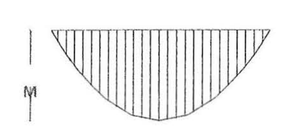
De hecho, si se impide completamente el giro de los extremos de una viga se hace **cinco** veces más rígida al tiempo que se reducen los momentos máximos.

COMPROBACIÓN ABREVIADA DE LA RIGIDEZ

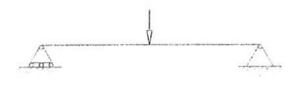
Para las distintas formas simples de gráfica de momentos:

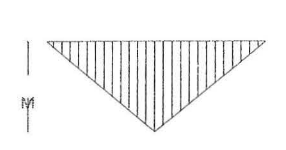


$$\frac{\delta}{L}=\frac{6}{48}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}$$



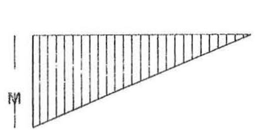
$$\frac{\delta}{L}=\frac{5}{48}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}$$





$$\frac{\delta}{L}=\frac{4}{48}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}$$





$$\frac{\delta}{L}=\frac{3}{48}\cdot\frac{M\cdot L}{E\cdot I}$$

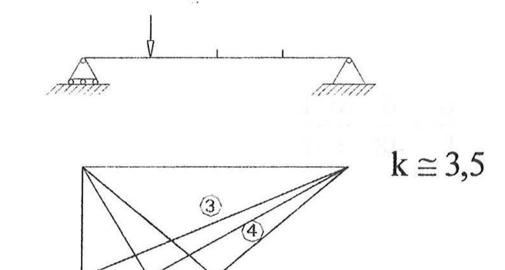
Poniendo juntas todas las gráficas:

$$\frac{\delta}{L}=k\cdot\frac{M\cdot L}{48\cdot E\cdot I}$$

siendo k=3 como mínimo y k=6 como máximo

Para cualquier otra forma de gráfica de momentos puede interpolarse aproximadamente k entre los dos más parecidos:

Por ejemplo:



El error será menor del 5%, perfectamente asumible con la ventaja de evitar operaciones complicadas que puedan ocasionar mayores errores

— Para secciones simétricas respecto a xx:

$$\frac{M}{E\cdot I}=\frac{2\cdot\varepsilon}{d} \qquad \frac{\delta}{L}=k\cdot\frac{\varepsilon\cdot L}{24\cdot d}=k\cdot\frac{\varepsilon\cdot\lambda}{24}$$

lo que permite para un criterio de rigidez dado hallar fácilmente la esbeltez límite:

por ejemplo, para $\frac{\delta}{L}\leq\frac{1}{500}$ y $\varepsilon=0{,}8\cdot10^{-3}$

$$2\cdot10^{-3}\geq\frac{k\cdot0{,}8\cdot10^{-3}}{24}\cdot\lambda_{\text{lím}} \qquad \lambda_{\text{lím}}\leq\frac{60}{k}$$

El orden razonable de operaciones es el siguiente:

1. Se dimensiona la viga con criterio de resistencia
2. Se comprueba que $\lambda\leq\lambda_{\text{lím}}$
3. En caso de que $\lambda>\lambda_{\text{lím}}$, debe buscarse una buena sección

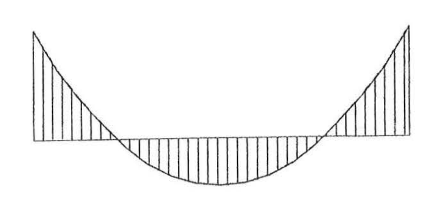
tal que su inercia sea $I\cdot\frac{\lambda}{\lambda_{\text{lím}}}$

— Si se presume que el problema será de rigidez, puede buscarse directamente una sección cuya inercia sea:

$$I\geq k\cdot\frac{M\cdot L}{48\cdot E\cdot I}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\delta}{L}\right)}$$

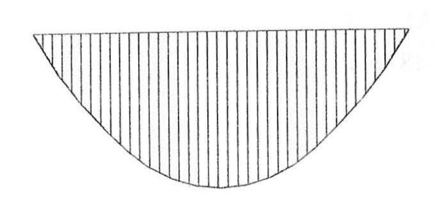
VIGAS CON COACCIONES DE EXTREMO

Casos simples:



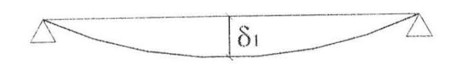
$M_{máx}\ 2/3\ M_i$ $\quad M_i = 3/2\ M_{máx}$

=

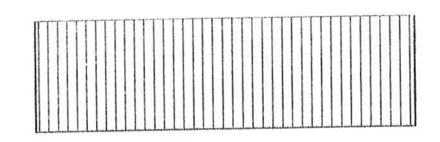


$3/2\ M_{máx}$

$$\frac{\delta_1}{L} = \frac{3}{2} \cdot 5 \cdot \frac{M_{máx} \cdot L}{48 \cdot E \cdot I}$$

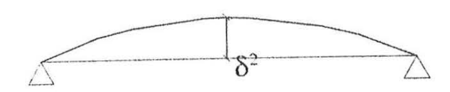


+



$M_{máx}$

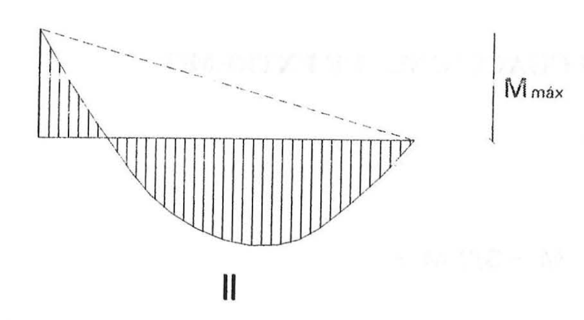
$$\frac{\delta_2}{L} = -6 \cdot \frac{M_{máx} \cdot L}{48 \cdot E \cdot I}$$

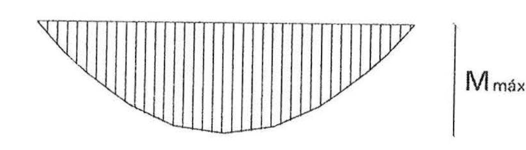


$$\frac{\delta}{L} = \frac{15-12}{2} \cdot \frac{M_{máx} \cdot L}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_{máx} \cdot L}{48 \cdot E \cdot I}$$

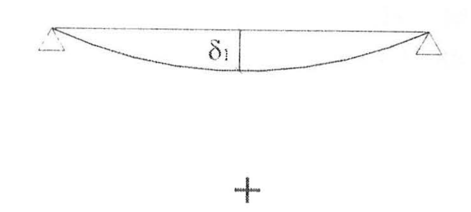
$\mathbf{k = 1{,}5}$

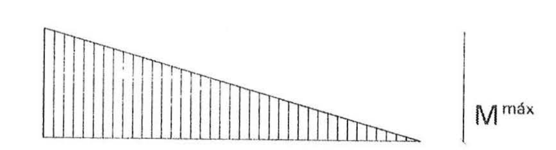
$$\lambda_{lim} = \frac{60}{3/2} = 40$$



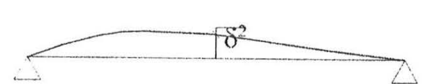


$$\frac{\delta_1}{L} = 5 \cdot \frac{M_{máx} \cdot L}{48 \cdot E \cdot I}$$





$$\frac{\delta_2}{L} = 3 \cdot \frac{M_{máx} \cdot L}{48 \cdot E \cdot I}$$

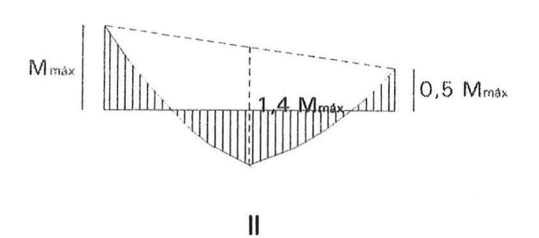


δ

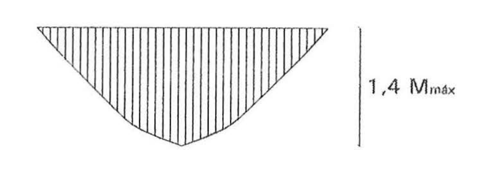
$$\frac{\delta}{L} = (5-3) \cdot \frac{M_{máx} \cdot L}{48 \cdot E \cdot I} = 2 \cdot \frac{M_{máx} \cdot L}{48 \cdot E \cdot I} \qquad \mathbf{k = 2}$$

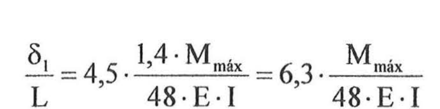
$$\lambda_{lím} = \frac{60}{2} = 30$$

en un caso más complejo:

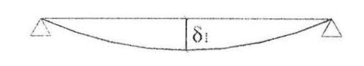


=

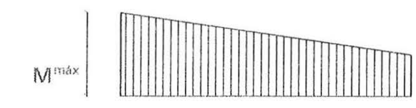




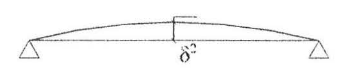
$$\frac{\delta_1}{L} = 4{,}5 \cdot \frac{1{,}4 \cdot M_{máx}}{48 \cdot E \cdot I} = 6{,}3 \cdot \frac{M_{máx}}{48 \cdot E \cdot I}$$



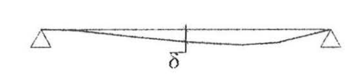
+



$$\frac{\delta_2}{L} = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{M_{máx}}{48 \cdot E \cdot I} = 4{,}5 \cdot \frac{M_{máx}}{48 \cdot E \cdot I}$$



$$\frac{\delta}{L} = (6{,}3 - 4{,}5) \cdot \frac{M_{máx}}{48 \cdot E \cdot I} = 1{,}8 \cdot \frac{M_{máx}}{48 \cdot E \cdot I} \qquad \mathbf{k = 1{,}8}$$



$$\lambda_{lím} = 12 \cdot \frac{5}{1{,}8} = 33{,}3$$

—En el caso de voladizos, lo más prudente es calcular la flecha en el extremo utilizando trabajos virtuales, como en el ejemplo desarrollado antes.

NOTAS

CUADERNO

31.03

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

jherrera@aq.upm.es

